|  |  |
| --- | --- |
| Gerb-BMSTU_01 | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  Калужский филиал  федерального государственного бюджетного  образовательного учреждения высшего образования  ***«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»***  ***(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)*** |

**ФАКУЛЬТЕТ** ***ИУК «Информатика и управление»***

**КАФЕДРА** \_\_***ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии»***

**ДОМАШНЯЯ РАБОТА №2**

**«Метод разделения переменных для решения ДУЧП2»**

**ДИСЦИПЛИНА: «Моделирование»**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнил: студент гр. ИУК4-62Б | | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ ( Калашников А.С. )  (Подпись) (Ф.И.О.) |
| Проверил: | | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (      Никитенко У.В. )  (Подпись) (Ф.И.О.) |
| Дата сдачи (защиты):  Результаты сдачи (защиты): | | |
|  | - Балльная оценка:  - Оценка: | |

Калуга, 2023

**Цель**: овладеть навыками использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования; практических навыков решения ДУЧП2.

**Задачи**: решить методом разделения переменных задачи для ДУЧП2 гиперболического, параболического и эллиптического типов. Выбрать среду для проведения расчетов. Оценить результаты расчетов. Визуализировать результаты.

**Вариант 10**

**Задача 1.** Решить методом Фурье и методом отражений начально-краевую задачу для волнового уравнения.

**Задание варианта:**

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант | Начально-краевая задача |
| 10 |  |

1. Отдельно выписать задачу Штурма-Лиувилля и решить её.
2. Ответ представить в максимально компактной форме
3. Построить профиль струны в различные моменты времени, начиная с нулевого.

Решение

Решим задачу методом Фурье.

Разделим равенство на :

В результате переменные разделяются, и получается два обыкновенных дифференциальных линейных уравнения:

Подставляя в виде в граничные условия, получим:

Поскольку равенства должны выполняться тождественно, то:

Таким образом, для функции получили задачу Штурма-Лиувилля:

Если , то общее решение уравнения (2) принимает вид:

Если , то – действительные числа и общее решение уравнения (2) принимает вид:

Из (3):

Если , то – действительные числа и общее решение уравнения принимает вид:

Неизвестные коэффициенты найдем из граничных условий:

Пусть , тогда

Таким образом, получаем следующее решение задачи Штурма-Лиувилля:

(4) - собственные числа;

- собственные функции.

Подставим значение в (4). Для каждого значения n = 1, 2, … получим ОДУ:

Решим ОДУ относительно функции , составим характеристическое уравнение:

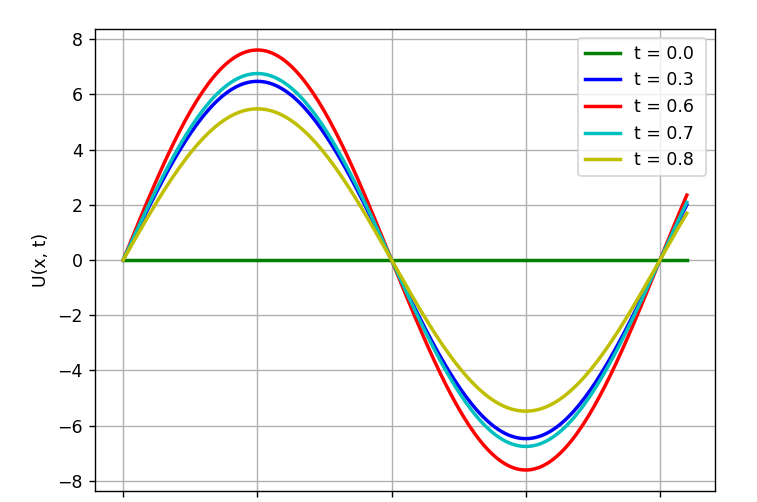
Общее решение этого уравнения имеет вид:

Таким образом, получаем следующее решение, являющееся суммой множества решений:

где

Подставим в (2), получим:

Построение графика для полученной функции:

****

**Рис.1.** Профиль струны в различные моменты времени

**Задача 2.** Решить методом Фурье начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности.

1. Ответ представить в максимально компактной форме
2. Построить графики изменения температуры в различные моменты времени, начиная с нулевого.

**Задание варианта:**

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант | Начально-краевая задача |
| 10 |  |

С помощью замены U(x,t)=V(x,t)+W(x,t) (5), где V(x, t) - новая функция, W(x, t) - вспомогательная функция (наперед заданная), её необходимо подобрать таким образом, чтобы V(0,t) = V(l, t) =0 для новой функции (V(x, t)) оказалась с нулевыми граничными условиями.

Тогда имеем:

V(0,t) = V(l, t) =0(2,3)

V(x,0)+W(x,0)=0;

𝑉(𝑥, 0) + 𝑇 + (𝑈 − 𝑇) =9+= 0;

𝑉(𝑥, 0) = (𝑇 − 𝑈) – T= (4')

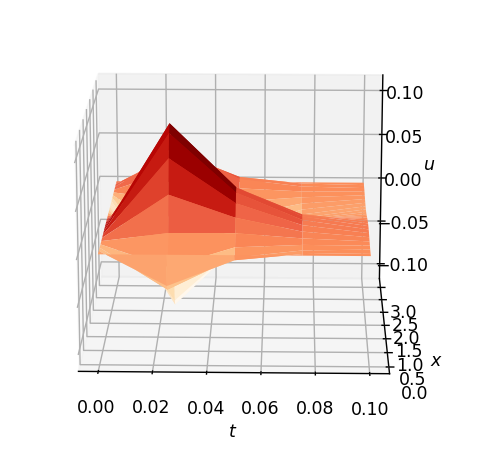
Итак, решение задачи (1') - (4') связано с решением исходной задачи (1) - (4)

(8) удовлетворяет (2'), (3')

𝑉(𝑥, 0)

Сравнив два ряда, получаем что (0) = или

Тогда



**Рис.2.** Демонстрация изменения температуры в различные моменты времени, начиная с нулевого

С течением времени температура стержня понижается до нуля, а для любого фиксированного времени распределение температуры в стержне подчиняется закону, описанному функцией: U(x, t0)

**Задача 3.** Решить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе 0<r<1, 0<φ< α

1. Ответ представить в максимально компактной форме
2. Построить графики изменения температуры в различные моменты времени, начиная с нулевого.

**Задание варианта:**

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант | Внутренняя задача Дирихле |
| 10 |  |

**Решение**

Найдем решение уравнения:

Подставляя выражение в уравнение Лапласа и выполняя деление, получим задачу Штурма-Лиувилля на отрезке 0 < < для определения (1):

Из подстановки также получим R(r):

Решение задачи (1):

Подставим значение в (2), получим:

которое представляет собой однородное ДУ Эйлера второго порядка. Его решение ищем в виде:

Подставляя это уравнение в (3) и сокращая на приходим к уравнению:

Общее решение уравнения Эйлера:

Подставим

частные решения исходного уравнения, удовлетворяющего граничным условиям:

Составим ряд из этих частных решений:

Подставляя в условие

**,** получим:

a - в ряд Фурье по синусам. Тогда:

Подставим k = 1:

Подставляем в (5), получаем решение задачи Дирихле:

**Вывод:** в ходе выполнения данной домашней работы были приобретены практические навыки использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования; практических навыков решения ДУЧП2.

**Приложения**

**Листинг:**

**Задание №1**

import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

import math

def U(x, t):

pi = np.pi

r = 0.0

r = 0 + 8\*math.sin(pi\*t)\*math.sin(pi\*x)

print("r=",r)

print(2/math.pi+t, "\n")

return r

l = 4

a = 7

t = [0.0, 0.3, 0.6, 0.68, 0.76]

color = ['g-', 'b-', 'r-', 'c-', 'y-']

indx = 0

for tt in t:

x = np.linspace(0, 2.1, num=200)

print("x=",x)

y = []

print("tt=",tt)

for i in x:

y.append(U(i, tt))

plt.plot(x, y, '%s' % color[indx], linewidth=2, label='t = %.1f '% tt)

indx+=1

plt.xlabel('x')

plt.ylabel('U(x, t)')

plt.grid(True)

plt.legend(loc=0)

plt.show()

**Задание №2**

import matplotlib.pyplot as plt

import numpy as np

import math

def U(x, t):

pi = math.pi

repetitions = 30

r = 0.0

for i in range(repetitions):

n = i + 1

temp = (-3\*np.power(-1,n)-9)\*np.exp(np.power(6,0.5)\*pi\*np.power(n,2)\*t)

temp = 9-4\*x + 2/pi \* temp\*np.sin((pi\*n)/3\*x)

r += temp

return r

t = [0.0, 1.3, 1.4, 1.5]

color = ['g-', 'b-', 'r-', 'c-']

indx = 0

for tt in t:

x = np.linspace(0, math.pi/2, num=200)

y = []

for i in x:

y.append(U(i, tt))

plt.plot(x, y, '%s' % color[indx], linewidth=2, label='t = %.2f '% tt)

indx+=1

plt.xlabel('x')

plt.ylabel('U(x, t)')

plt.grid(True)

plt.legend(loc=0)

plt.show()

fig = plt.figure()

ax = plt.axes()

X, Y = np.meshgrid(ts, xs)

for i in range(len(ts)):

plt.plot([xs[i] for j in res[:, i]], res[:, i], label=f"$t={ts[i]:.2f}$")

ax.set\_xlabel("$x$")

ax.set\_ylabel("$u(x, t)$")

plt.legend(framealpha=0.5, frameon=True)

plt.show()